الجبر الخطي

الكاتب: عمر عبد السلام أبوستة.

الجبر الخطي هو حل منظومات المعادلات الخطية، مثل هذه المنظومة:

س + 2 ص = 1

س - ص = 2

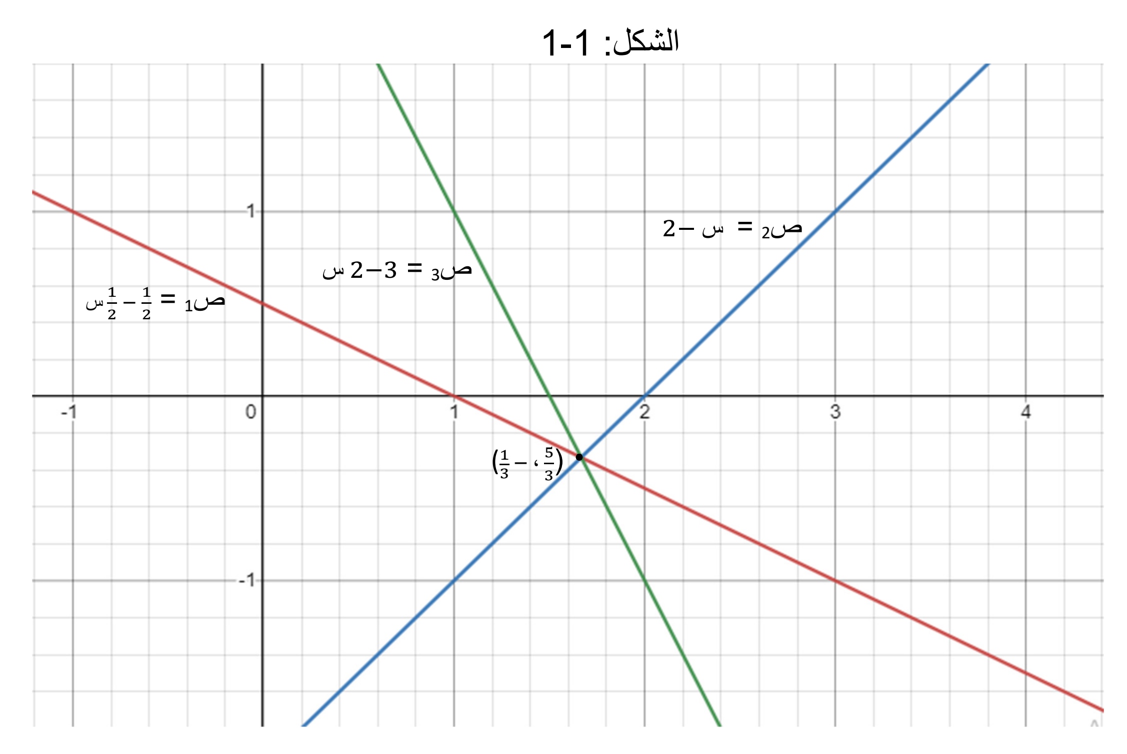
حيث أنها منظومات من معادلتين ومتغيرين على الأقل، تكون فيها المتغيرات مرفوعة للأس الأوّل على الأكثر، وبحلّها نعني إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كلا المعادلتين، وقد يكون لهذه المنظومات حلا وحيدا، أو عددا لا نهائيا من الحلول، أو قد لا يوجد لها حل. ويوجد طريقتين لحل هذه المنظومات: باستخدام الدوال، أو باستخدام المتجهات.

1- حل المنظومات الخطية باستخدام الدوال:

1-1 منظومة معادلات من متغيرين:

إذا أردنا حل المنظومة السابقة، فيمكن تمثيل كل من المعادلتين بيانيا بجعل ص دالة في س (أو العكس)، كالتالي:

الشكل: 1-1



حيث أنّ هذه الدوال تُمثّل بيانيا كخطوط مستقيمة، فيظهر لنا أنّ نقطة التقاطع بين المستقيمين هي النقطة التي تحقق كلاهما، وهي حل المنظومة، وللتوصّل إلى هذه النقطة حسابيا، يوجد طريقتين:

1-1-1 التعويض:

حيث في تلك النقطة:

$$ص_1 = ص_2$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}س = س - 2$$

$$س = \frac{5}{3} \qquad ص = -\frac{1}{3}$$

يصعب استخدام طريقة التعويض كثيرا عند وجود عدد أكبر من المتغيّرات والمعادلات.

2-1-1 طريقة الحذف:

تستغل هذه الطريقة أن ضرب طرفي المعادلة في أي مقدار أو جمع كلٍّ منهما به، لا يغيرها. وعند جمع معادلتين مع بعضهما البعض، تَنتُج معادلة ثالثة دالتها تمر من نقطة التقاطع أيضا (مثل $ص_3$ في الشكل (1-1) حيث أنها ناتج جمع معادلتي المنظومة)، وبالتالي، يمكن ضرب أحد المعادلتين أو كلاهما في ثابت معين، بحيث عند جمعهما يُحذف أحد المتغيرات، ففي المثال السابق يمكن ضرب المعادلة الثانية في 2، ثم الجمع؛ ليُحذف المتغير ص:

$$\begin{array}{r} س + 2ص = 1 \\ + \quad 2س - 2ص = 4 \\ \hline 3س = 5 \end{array}$$

2-1 منظومة معادلات في ثلاثة متغيرات:

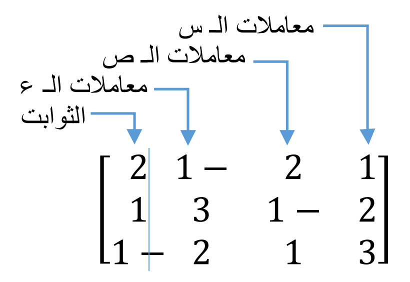
يمكن استخدام طريقة الحذف هنا أيضا، وذلك بحذف أحد المتغيرات من معادلتين، لنحصل على معادلتين في مجهولين، ثم حل تلك المعادلتين بالحذف، وهكذا حسب عدد المعادلات. ولكن عند كثرة المعادلات سوف تتعقد هذه الطريقة كثيرا، ولحل تلك المشكلة يمكن تنظيم هذه الطريقة، لتكون أسهل، ولتسهيل برمجتها على الحاسوب. على سبيل المثال إن أردنا حل هذه المنظومة:

$$س + 2ص - ع = 2$$

$$2س - ص + 3ع = 1$$

$$3س + ص + 2ع = -1$$

يمكن أن نضعها على هذه الصورة:



$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

استخدام هذه الصيغة لترتيب البيانات يسمى "مصفوفة"، وهنا يجب أن يُمثّل كل عمود معاملات متغير واحد، لأننا هنا سوف نستخدم طريقة الحذف، بضرب أعداد معينة في الصفوف (المعادلات) وبجمع الصفوف لتصفير (حذف متغيرات) أكبر عدد ممكن من العناصر في كل صف. فلحل هذه المنظومة يمكن ضرب الصف الأول في -2 وجمعه مع الثاني، واستبدال الصف الناتج (المعادلة الناتجة) بالصف الثاني، (لأنه قلنا أن المعادلة الناتجة من جمع معادلتين، هي أيضا تمر من نقاط تقاطع المعادلتين، فيمكن استبدالها بأي من المعادلات الأصلية، واستخدامها للوصول إلى الحل)، وباستخدام نفس الفكرة مع الصف الثالث:

$$\text{صف}_2 = \text{صف}_2 - 2\,\text{صف}_1 \qquad \text{صف}_3 = \text{صف}_3 - 3\,\text{صف}_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -7 \end{array}\right]$$

$$\text{صف}_2 = -\frac{1}{3}\,\text{صف}_2 \qquad \text{صف}_3 = -\frac{1}{5}\,\text{صف}_3 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\text{صف}_3 = \text{صف}_3 - \text{صف}_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{5} \end{array}\right]$$

وبذلك تحصلنا على المعادلة: $\frac{2}{3}$ ع = $-\frac{4}{5}$ ← ع = $-\frac{6}{5}$ ، ويمكن إيجاد بقية المتغيرات من معادلة الصف الأول والثاني، وهما:

$$\text{ص} - \frac{5}{3}\,\text{ع} = 1 \qquad\qquad \text{س} + 2\,\text{ص} - \text{ع} = 2$$

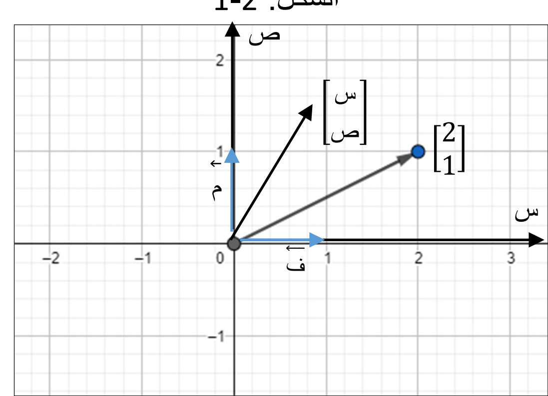
ويمكن أيضا الاستمرار بإجراء العمليات على الصفوف لتصفير عنصر واحد من الصف الثاني، وعنصرين من الصف الأول؛ للحصول على قيم س وص مباشرة من المصفوفة.

2 حلُّ المنظومات الخطية باستخدام المتجهات:

2-1 منظومة معادلات من مجهولين:

$$\text{س} + 2\,\text{ص} = 1$$
$$\text{س} - \text{ص} = 2$$

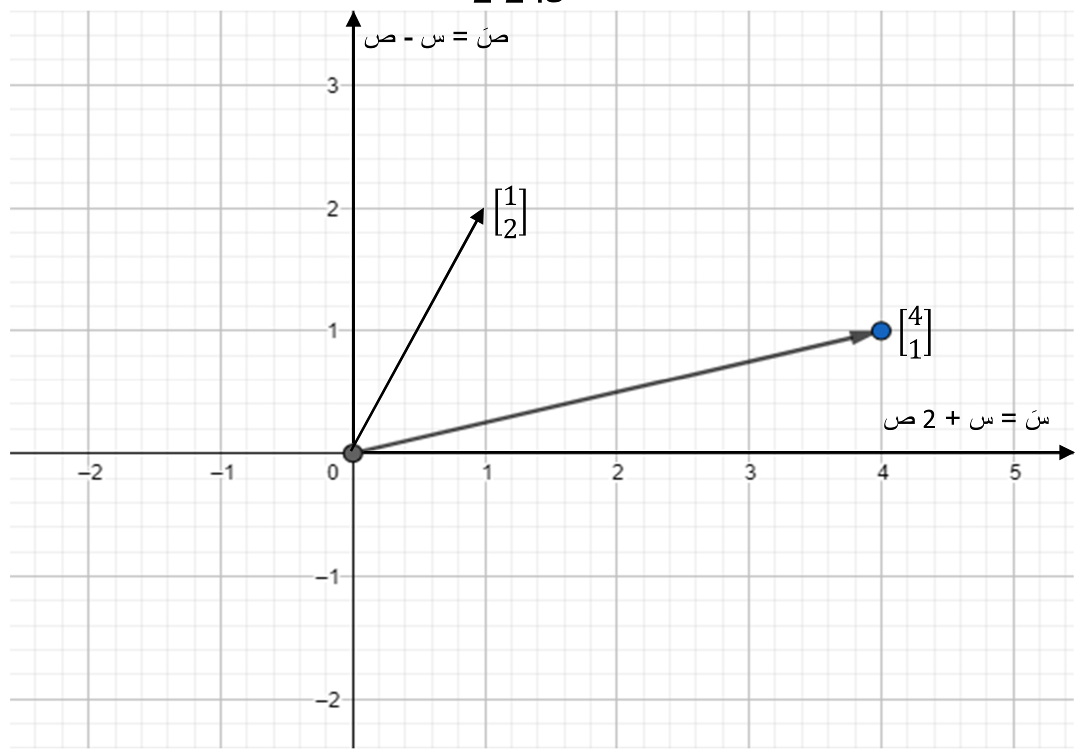
يُمكن تمثيل قيم س وص كمتجه كما في الشكل(2-1)، ويمكن تمثيل نواتج المعادلتين كمتجه كما في الشكل (2-2)؛ بوضع المعادلة الأولى في المحور الأفقي والثانية في العمودي (أو العكس).



الشكل: 2-1

فعلى سبيل المثال؛ لو أدخلنا المتجه $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ إلى المنظومة، فإنّ الناتج هو المتجه $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. وبذلك تكون مشكلتنا هي إيجاد المُدخل $\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ الذي يُنتج المتجه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.





الشكل: 2-2

لنحل هذه المشكلة؛ علينا أن نفهم عملية إدخال المتجه إلى المصفوفة جيدا، فعندما أدخلنا $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ كيف تحصّلنا على $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$؟ حدث ذلك بضرب قيم س وص في المعاملات في كل من المعادلتين، حيث:

$$\text{سَ} = \text{م}_{\text{س}1} \times \text{س} + \text{م}_{\text{ص}1} \times \text{ص}$$

$$\text{صَ} = \text{م}_{\text{س}2} \times \text{س} + \text{م}_{\text{ص}2} \times \text{ص}$$

معامل س في المعادلة الأولى

فيُمكن اعتبار معاملات الـ س مُتجه والـ ص مُتجه كالتالي:

$$\text{س} \begin{bmatrix} \text{م}_{\text{س}1} \\ \text{م}_{\text{س}2} \end{bmatrix} + \text{ص} \begin{bmatrix} \text{م}_{\text{ص}1} \\ \text{م}_{\text{ص}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{سَ} \\ \text{صَ} \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصار السابق؛ بوضع متجها المعاملات على هيئة "مصفوفة"، كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \text{م}_{\text{س}1} & \text{م}_{\text{ص}1} \\ \text{م}_{\text{س}2} & \text{م}_{\text{ص}2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{سَ} \\ \text{صَ} \end{bmatrix}$$

حيث تسمى العملية السابقة بعملية "الضرب"، وهي عملية إدخال قيم للمتغيرات في منظومة المعادلات، حيث دمجنا متجه معاملات الـ س والـ ص ليكوّنا مصفوفة؛ لأنهما يشكلان منظومة واحدة. وبالتالي فإنّ مصفوفة منظومة المعادلات التي نحاول حلّها تعمل كالتالي:

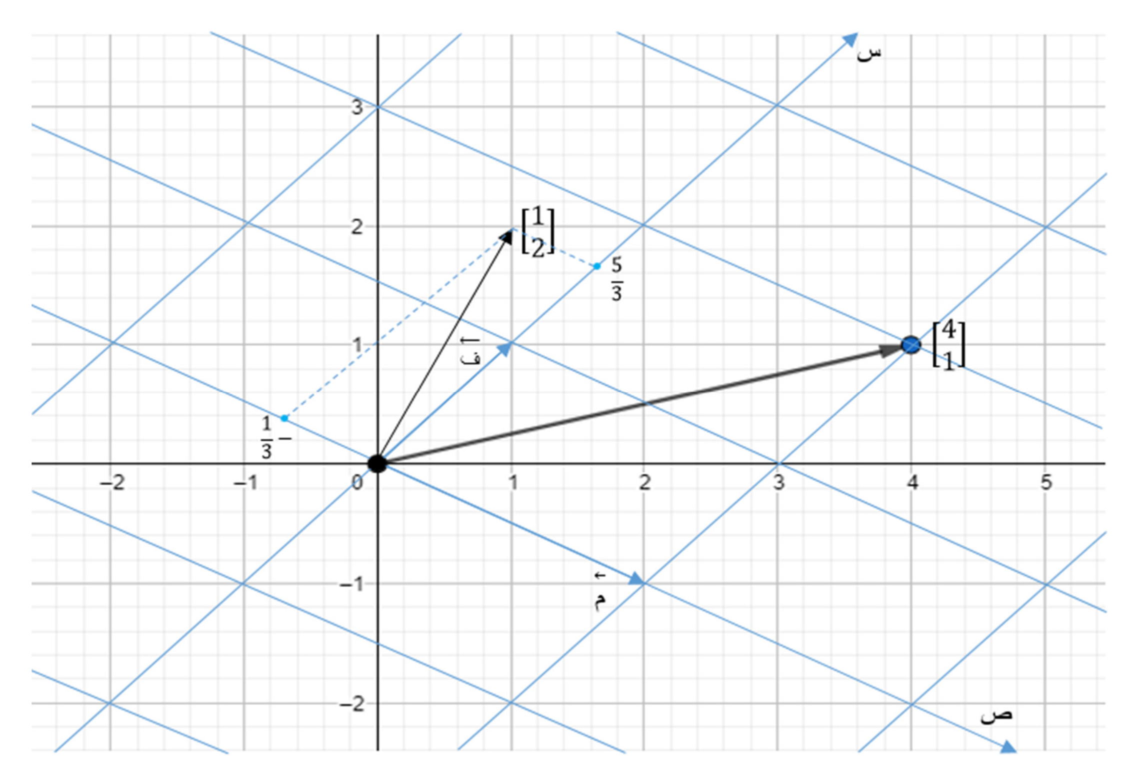
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يُمكن تمثيل هذه المصفوفة بيانيا، وذلك "بضربها" في المتجهات الأساسية ($\overleftarrow{\text{ف}}$ و$\overleftarrow{\text{م}}$):

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

لاحظ أنّنا تحصلنا على معاملات الـ س كما هي لـ $\overleftarrow{\text{ف}}$، ومعاملات الـ ص كما هي لـ $\overleftarrow{\text{م}}$. وبرسم $\overleftarrow{\text{ف}}$ و$\overleftarrow{\text{م}}$ ، كما في الشكل التالي:



يمكننا إيجاد أي قيمة للمُدخل $\begin{bmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\end{bmatrix}$ بدلالة الناتج $\begin{bmatrix}\text{سَ}\\ \text{صَ}\end{bmatrix}$ أو العكس.

فعلى سبيل المثال؛ المُدخل $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ يقابله $\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$ في الرسم. فيمكننا إيجاد الناتج عن طريق الرسم، بتحديد قيمة المتجه المقابل لـ $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$، ويظهر أنه $\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$، وهو حل منظومة المعادلات. ولإيجاد هذا المتجه حسابيا؛ نحتاج إلى إيجاد معكوس المصفوفة، فإذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ حوّلت المُدخل $\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$، نحتاج إلى إيجاد المصفوفة $\begin{bmatrix}\text{أ} & \text{ب}\\ \text{جـ} & \text{د}\end{bmatrix}$ التي تُحول $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

فإذا كانت المصفوفة الأصلية حَوّلت متجهات الوحدة الأساسية من $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ و$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ إلى $\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$ و$\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ فإن معكوسها يردها لما كانت عليه، فيمكن أن نكتب:

$$\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث دمجنا المتجهات في مصفوفات. وبإجراء عملية "الضرب"؛ نحصل على:

أ + ب = 1   جـ + د = 0

2 أ - ب = 0   2 جـ - د = 1

وبحل المعادلات السابقة:

أ = $\frac{1}{3}$ ب = $\frac{2}{3}$ جـ = $\frac{1}{3}$ د = - $\frac{1}{3}$

والآن يمكن ضرب معكوس "مصفوفة المنظومة" في متجه الثوابت، للحصول على الحل:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

إذن؛ لحل أي منظومة معادلات:

معكوس مصفوفة المنظومة × متجه الثوابت = الحل

يُمكن إيجاد قانون لمعكوس المصفوفة (الثنائية)، بضرب مصفوفتين من المجاهيل، بافتراض الأولى هي المعكوس؛ كالتالي:

$$\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \begin{bmatrix} هـ & و \\ ز & حـ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن المعكوس هو:

$$\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \frac{1}{هـحـ - وز} \begin{bmatrix} حـ & -و \\ -ز & هـ \end{bmatrix}$$

القطر الفرعي   القطر الرئيسي

حيث أن الكسر أمام المصفوفة مُوزّع على جميع عناصرها (افترضنا ذلك لتسهيل الكتابة لا أكثر). ولاحظ أنّ المعكوس يكون بقلب عناصر القطر الرئيسي وتغيير إشارة عناصر القطر الفرعي والضرب في ذلك الكسر.

2-2 منظومة معادلات من 3 متغيرات:

س + 2 ص + ع = 1

س + ص - 2 ع = 3

2 س - ص + ع = 2

يمكن تطبيق القانون الذي استخرجناه، وهو:

معكوس مصفوفة المنظومة × متجه الثوابت = الحل

فيجب علينا إيجاد معكوس المصفوفة الثلاثية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لنفعل ذلك؛ نحتاج إلى أن نفهم آلية عمل قانون معكوس المصفوفة الثنائية -الذي استخرجناه-؛ لإمكانية تطبيقه على المصفوفات الثلاثيّة. فلنأخذ بعض المصفوفات البسيطة ولنطبق عليها القانون:

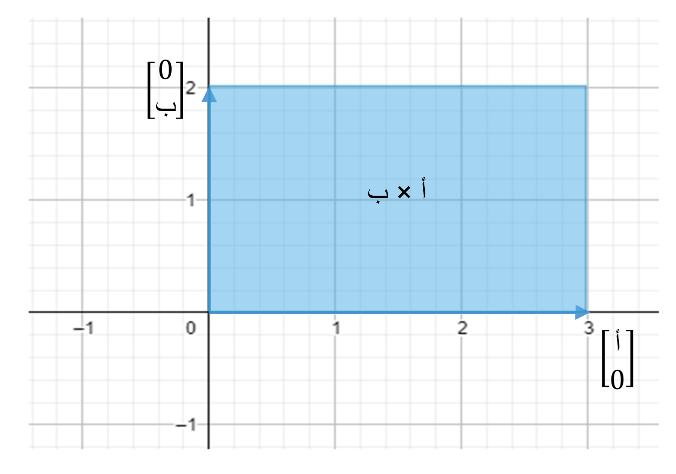
لنبدأ بهذه المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}$$

لا نحتاج في هذه المصفوفة إلا لتقصير طول كل متجه ليصبح طوله واحدا، ويكون ذلك بضربه في مقلوبه، ويمكن الحصول على مقلوبه حسابيا:

$$\frac{1}{\text{أب}} \times \text{ب} = \frac{1}{\text{أ}} \qquad \frac{1}{\text{أب}} \times \text{أ} = \frac{1}{\text{ب}}$$

حيث يسمّى هذا العنصر بـ "المعامل المساعد"



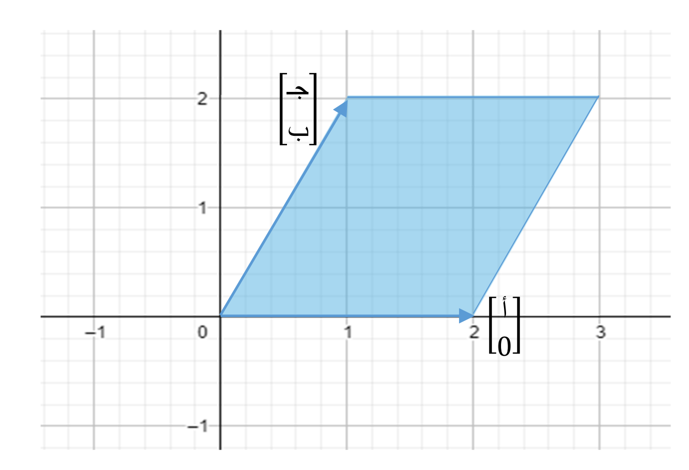
فيمكن إيجاد المعكوس بضرب المصفوفة في $\frac{1}{\text{أب}}$ ، وبقلب عناصر القطر الرئيسي؛ ليكون المعامل المساعد في استقبال الـ $\frac{1}{\text{أب}}$، فيكون الناتج هو مقلوب كل عنصر في خانته.

حيث (أ × ب) تساوي المساحة بين المتجهين وتسمى "مُحدّد المصفوفة" (م).

الآن نزيد التعقيد بإمالة أحد المتجهين:

$$\begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{أ} \\ \text{ب} & 0 \end{bmatrix}$$

يتضح لنا هنا المغزى من ضرب مُرَكّبات المتجهات المخالفة لها في (-1) في قانون معكوس المصفوفة الثنائية الذي استخرجناه، فالمتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ يكون في الأساس عموديا، فنضرب مُرَكّبته الأفقية في (-1) لكي نردها إلى الصفر.



فيمكن إيجاد معكوس أي مصفوفة بثلاث خطوات: بضرب المصفوفة في مقلوب مُحدّدها، وباستبدال كل عُنصر بمعامله المساعد، وبتغيير إشارة المُركّبات المخالفة لمتجهاتها.

2-2-1 مُحدّد المصفوفة الثنائية:

ظهر لنا مُحدّد المصفوفة الثنائية في قانون معكوسها، وهو:

م = أ د - ب جـ

للمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$$

ويُمكن إثباته من الشكل، بحيث يساوي المربع الكبير ناقصا المساحات الجانبية.

من القانون، نلاحظ أنه يمكننا تقسيم المصفوفة، إلى مصفوفتين، بحيث مجموع مُحدّد كل منهما يساوي مُحدّدها:

$$\begin{bmatrix} \text{ب} & 0 \\ 0 & \text{جـ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \text{أ} \\ \text{د} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{bmatrix}$$

فيُمكن استغلال هذه النقطة لإيجاد مُحدّد المصفوفة الثلاثية.

2-2-2 مُحدّد المصفوفة الثلاثية:

بتجزئة المصفوفة إلى عِدّة مصفوفات أبسط:

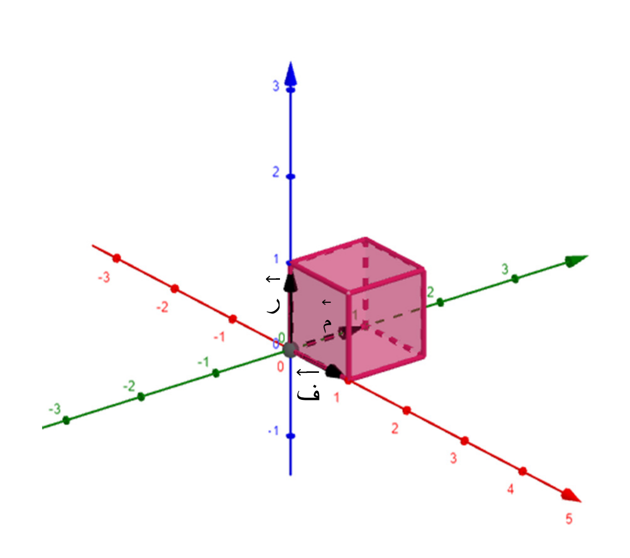
$$\begin{bmatrix} \text{جـ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{د} \\ 0 & \text{حـ} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{جـ} & 0 & 0 \\ 0 & \text{هـ} & 0 \\ 0 & 0 & \text{ز} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \text{ب} & 0 \\ \text{و} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ز} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \text{ب} & 0 \\ 0 & 0 & \text{د} \\ \text{ذ} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{أ} \\ \text{و} & 0 & 0 \\ 0 & \text{حـ} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \text{أ} \\ 0 & \text{هـ} & 0 \\ \text{ذ} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ذ} & \text{حـ} & \text{ز} \end{bmatrix}$$

م = أ هـ ذ - أ و حـ - ب د ذ + ب و ز - جـ هـ ز + جـ د حـ

حيث أنّ الإشارة السالبة بسبب اختلاف ترتيب المتجهات الأساسية، فإنّه في الأصل، المُتجه الأفقي يمين الرأسي ($\overleftarrow{ر}$) ويسار العمودي، فإذا اختلف هذا الترتيب؛ اختلفت الإشارة.

بالتبسيط:

م = أ (هـ ذ - و حـ)
- ب (د ذ - و ز)
+ جـ (د حـ - هـ ز)



3-2-2 تبسيط قانون مُحدّد المصفوفة الثلاثية (طريقة المُحدّدات الجُزئية):

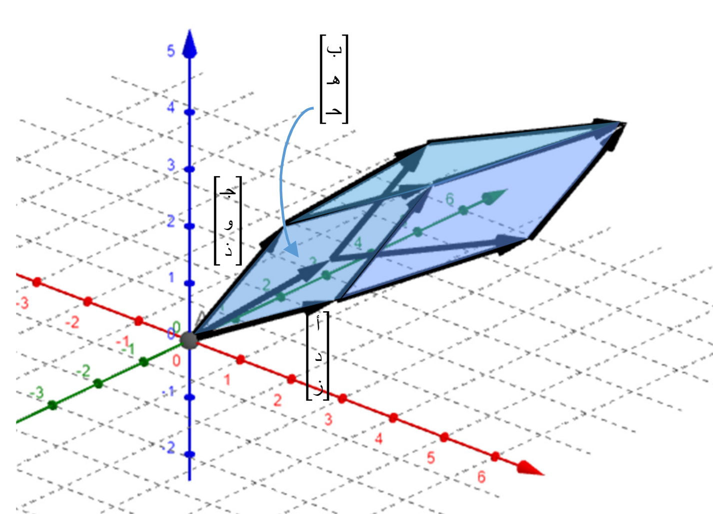
إذا تمعّنّا في القانون، فنجد أنّ ما بين الأقواس -يُمكن اعتباره- المُحدّد الثنائي الناتج عن شطب عمود وصف العُنصر المضروب في القوس، ويُسمى "المُحدّد الجُزئي للعُنصر".

$$\begin{bmatrix} جـ & ب & أ \\ و & هـ & د \\ ذ & حـ & ز \end{bmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} و & هـ \\ ذ & حـ \end{vmatrix}$$

وبالتالي لإيجاد مُحدّد المصفوفة الثلاثية؛ يُمكن اختيار صفا أو عمودا، وضرب كل عنصر في محّدده الجُزئي، مع تغيير إشارة العُنصر الثاني، والجمع.

4-2-2 المعاملات المساعدة لعناصر معكوس المصفوفة الثلاثية:

إذا كان المعامل المساعد للمصفوفة الثنائية هو الضلع المقابل؛ فإنّ المعامل المساعد للمصفوفة الثلاثية هو الوجه المقابل، ويتّضح من الشكل أنّه المُحدّد الجُزئي للعنصر.



إذن معكوس مصفوفة المنظومة التي نُحاول حلّها هو:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

وعند ضربها في متجه الثوابت؛ نحصل على حل المنظومة:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} & \frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}$$